

KPSS

MATEMATİK

KONU ANLATIMLI SORU BANKASI

ANKARA

657
yayinevi

İÇİNDEKİLER

Matematiğe Giriş	1
Temel Kavramlar	11
Bölme - Bölünebilme Kuralları	85
EBOB - EKOK	121
Rasyonel Sayılar	143
Basit Eşitsizlikler	165
Mutlak Değer	185
Çarpanlara Ayırma	207
Üslü Sayılar	239
Köklü Sayılar	265
Denklemler	293
Sıralama	311
Oran - Orantı	319
Denklem Kurma - Kesir Problemleri	345
Yaş Problemleri	381
İşçi - Havuz Problemleri	401
Hareket Problemleri	423
Yüzde - Kâr - Zarar - Faiz Problemleri	443
Karışım Problemleri	469
İşlem - Bağıntı ve Fonksiyon - Modüler Aritmetik	487
Saat Problemleri	510
Saymanın Temel İlkesi - Permütasyon - Kombinasyon	521
Olasılık	538
Kümeler	567
İstatistik ve Grafikler	579
Sayısal Mantık	599

SIRALAMA

Aralarında $>$, $<$, \leq , \geq sembollerinden biri bulunan ifadelere, eşitsizlik denir.

$a > b$ ifadesi "a büyüktür b" diye okunur.

$a < b$ ifadesi "a küçüktür b" diye okunur.

$a \geq b$ ifadesi "a büyük veya eşittir b" diye okunur.

$a \leq b$ ifadesi "a küçük veya eşittir b" diye okunur.

$a > b$ ifadesine de a ile b nin sıralanmış biçimi denir.

ÖRNEK

43 sayısı 34 sayısından büyüktür.

Buna göre, $43 > 34$ yazılır.

ÖRNEK

-7 sayısı -5 sayısından küçüktür.

Buna göre, $-7 < -5$ yazılır.

ÖRNEK

$x \leq 4$ eşitsizliğini gerçekleyen doğal sayıların toplamı kaçtır?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 10

ÇÖZÜM

$x \leq 4$ eşitsizliğinde x; küçük veya eşittir 4 olacak şekilde doğal sayıları temsil eder.

$$4 + 3 + 2 + 1 + 0 = 10 \text{ olur.}$$

Cevap: E

ÖRNEK

$a - 7 > 6$ eşitsizliğini sağlayan en küçük tam sayı kaçtır?

A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 16

ÇÖZÜM

$$a - 7 > 6$$

$$a > 6 + 7$$

$$a > 13$$

13 ten büyük olan en küçük tam sayı 14 olur.

Cevap: C

- Bir çarpımın sonucu sıfır ise çarpanlardan en az biri sıfıra eşittir.

$$a \cdot b = 0 \text{ ise } a = 0 \text{ veya } b = 0 \text{ olur.}$$

- Bir çarpımın sonucu sıfır değilse çarpanlardan hiç biri sıfır olamaz.

$$a \cdot b \neq 0 \text{ ise } a \neq 0 \text{ ve } b \neq 0 \text{ olur.}$$

ÖRNEK

$(x - 3) \cdot (x + 2) = 0$ denkleminin kökler toplamı kaçtır?

A) -5 B) -2 C) -1 D) 1 E) 5

ÇÖZÜM

$$(x - 3) \cdot (x + 2) = 0 \text{ ise}$$

$$x - 3 = 0 \text{ veya } x + 2 = 0$$

$$x = 3 \text{ veya } x = -2 \text{ olur.}$$

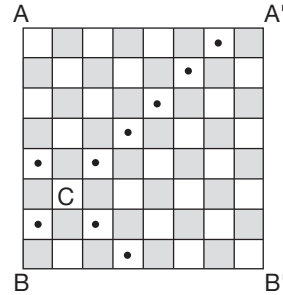
x in alabileceği değerler toplamı

$$3 - 2 = 1 \text{ olur.}$$

Cevap: D

SIRA SENDE

Satranç kurallarına göre, bir fil tek hamlede, aynı renkteki kareler üzerinde çapraz olarak ve yönünü değiştirmeden mümkün olan en son kareye kadar gidebilir. Örneğin aşağıdaki şekilde C ile gösterilen fil tek hamlede, kendi bulunduğu kare dışında noktalarla belirtilen 9 farklı kareden birine gidebilir.



Şekildeki satranç kartonu A köşesi A^1 ile, B köşesi B^1 ile çakışacak şekilde bir silindirik haline getirilerek AB ya da A^1B^1 kenarına gelen taşlara kurallara uygun olarak aynı yönde ilerleme olanağı verilmiştir.

Bu durumda C fili tek hamlede, kendi bulunduğu kare dışında kaç farklı kareden birine gidebilir?

CEVAP: 13

TEMEL KAVRAMLAR

Matematiğin ilk eylemi sayı saymaktır. Belki de sayılara ilk ihtiyacı olan kişi koyunlarını otlatan bir çobandı.

Sayı sistemi oluşmaya başladığında insanlar çok uzun bir süre sadece 1 ve 2 yi kullandılar.

1 ve 2 nin dışındaki her topluluğu "çok" kelimesi ile ifade etmişlerdir.

Sümerce 1 ve 2 ile "kadın" ve erkek" aynı sembollerle gösterilmiştir.

Çin ideogramlarında anlamı "erkek" olan şekilden üç tane olunca anlam "herkes", "ağaç" anlamındaki şekilden üç tane varsa anlam "orman" ve "kadın" demek olan ideogramlardan üç tane varsa anlam "dedikodu" olarak değişiyor.

RAKAM: Sayıları göstermek için kullandığımız sembollere **rakam** denir. (Cep telefonunun tuşları üzerindeki sayılar.)

{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} kümesinin elemanları birer rakamdır.

ÖRNEK

a, b, c birbirinden farklı birer rakam olmak üzere, $a + b + c$ toplamı en çok kaçtır?

- A) 21 B) 22 C) 24 D) 27 E) 28

ÇÖZÜM

Birbirinden farklı en büyük üç rakam için cevap $9 + 8 + 7 = 24$ tür.

Cevap: C

SAYI: Rakamların tek başına ya da birlikte belirttiği çokluğa **sayı** denir.

UYARI

Her rakam bir sayıdır. Fakat her sayı bir rakam değildir.

Örneğin;

7, bir rakam ve aynı zamanda sayıdır.

97 ise bir sayıdır, bir rakam değildir.

DOĞAL SAYI: $N = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ kümesinin elemanlarının her birine **doğal sayı** denir.

Bu kümeden 0 çıkarılarak elde edilen kümeye sayma sayıları kümesi denir ve $N^+ = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ biçiminde gösterilir.

657 YAYINEVİ

ÖRNEK

a ve b doğal sayılar olmak üzere,

$a \cdot b = 24$ olduğuna göre,

$a + b$ toplamının alabileceği en büyük ve en küçük değerlerin toplamı kaçtır?

- A) 10 B) 20 C) 25 D) 35 E) 40

ÇÖZÜM

$$a \cdot b = 24$$

Çarpım sabitken toplamın en küçük olması için sayılar birbirine yakın seçilir.

$$a \cdot b = 24$$

$a = 6$ ve $b = 4$ için $a + b = 6 + 4 = 10$ en küçük değer olur.

Çarpım sabitken toplamın en büyük olması için sayılar birbirinden uzak seçilir.

$$a \cdot b = 24$$

$a = 1$ ve $b = 24$ için $a + b = 1 + 24 = 25$ en büyük değer olur.

Bu değerlerin toplamı $10 + 25 = 35$ olur.

Cevap: D

ÖRNEK

a ve b doğal sayılar olmak üzere,

$a + b = 27$ olduğuna göre,

a . b çarpımının en büyük değeri kaçtır?

A) 182 B) 184 C) 192 D) 200 E) 220

ÇÖZÜM

Toplam sabitken çarpımın en büyük olması için sayılar birbirine yakın seçilir.

$a + b = 27$

$a = 14$ ve $b = 13$ için

$a . b = 14 . 13 = 182$ en büyük değer olur.

Cevap: A

ÖRNEK

a, b, c doğal sayılar olmak üzere,

$$\frac{2a + 3b}{b + c} = 3$$

olduğuna göre, $a + b + c$ toplamının en küçük değeri kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 5 E) 6

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned} \frac{2a + 3b}{b + c} = 3 &\Rightarrow 2a + 3b = 3b + 3c \\ &\Rightarrow 2a = 3c \\ &\Rightarrow a = 0 \text{ ve } c = 0 \end{aligned}$$

Payda sıfır olamayacağı için,

$b + c \neq 0$ $b = 1$ seçilir.

$a + b + c = 0 + 1 + 0 = 1$ en küçük değer olur.

Cevap: B

ÖRNEK

a, b ve c birbirlerinden farklı sayma sayıları olmak üzere,

$$a = b - 4$$

$$3c = a + b$$

olduğuna göre, $a + b + c$ toplamının en küçük değeri kaçtır?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

ÇÖZÜM

a, b, c sayma sayısı olduğuna göre, $b \geq 5$ olmalıdır.

$b = 5$ için $a = 1$ olur.

$$3c = 1 + 5$$

$$3c = 6$$

$$c = 2 \text{ dir.}$$

$a + b + c = 1 + 5 + 2 = 8$ en küçük değer olur.

Cevap: D

SIRA SENDE

$ABCD$ ifadesi

$$ABCD = (A+B) \cdot (A+C) \cdot (A+D) \cdot (B+C) \cdot (B+D) \cdot (C+D)$$

biçiminde tanımlanıyor.

Örneğin,

$$1132 = (1+1) \cdot (1+3) \cdot (1+2) \cdot (1+3) \cdot (1+2) \cdot (3+2)$$

$$1132 = 1440$$

Buna göre, $A + B + C + D = 11$ olduğuna göre,

$ABCD$ ifadesinin en büyük değeri kaç olur?

CEVAP: 27000

657 YAYINEVİ

TAM SAYILAR

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

kümesinin elemanlarının her birine bir tam sayı denir.

$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ kümesine pozitif tam sayılar kümesi denir.

$\mathbb{Z}^- = \{\dots, -4, -3, -2, -1\}$ kümesine negatif tam sayılar denir.

UYARI

SIFIR \Rightarrow $\left(\begin{array}{c} \text{doğal sayı} \\ \text{tam sayı} \\ \text{rakam} \\ \text{çift sayı} \end{array} \right) \Rightarrow$ sıfır pozitif ya da negatif değildir.

ÖZEL TANIMLANMIŞ SAYILAR

MÜKEMMEL SAYI

Mükemmel sayıları Pisagor tanımlamıştır. Pisagor a göre, sayısal mükemmellik bir sayının bölenleri ile ilgilidir. Mükemmel sayının tanımını, bir soru tarzıyla inceleyelim.

ÖRNEK

Pozitif bir tam sayının kendisinden küçük pozitif tam sayı bölenlerinin toplamı sayının kendisine eşit oluyorsa o sayıya **mükemmel sayı** denir.

Örneğin; 6 sayısının kendinden küçük pozitif tam sayı bölenleri olan 1, 2 ve 3 ün toplamı $1 + 2 + 3 = 6$ sayının kendisine eşit olduğu için 6 mükemmel sayıdır. **Buna göre, aşağıdakilerden hangisi mükemmel sayıdır?**

- A) 18 B) 24 C) 28 D) 42 E) 52

ÇÖZÜM

Tek tek şıkları verilen tanıma göre inceleyelim.

- A) 18 in bölenleri $\rightarrow 1, 2, 3, 6, 9$
 $18 \neq 1 + 2 + 3 + 6 + 9$
 $18 \neq 21$
- B) 24 ün bölenleri $\rightarrow 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12$
 $24 \neq 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 8 + 12$
 $24 \neq 36$
- C) 28 in bölenleri $\rightarrow 1, 2, 4, 7, 14$
 $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$
 $28 = 28$

Bu nedenle 28 mükemmel sayıdır.

Cevap: C

Pisagor dan yaklaşık 200 yıl sonra Öklid bu sayıların p asal sayı olmak üzere,

$$2^{P-1} \cdot (2^P - 1)$$

formülüyle genelleştirilebileceğini söylemiştir.

$$P = 2 \text{ için } 2^{2-1} \cdot (2^2 - 1) = 2 \cdot 3 = 6$$

$$P = 3 \text{ için } 2^{3-1} \cdot (2^3 - 1) = 4 \cdot 7 = 28$$

$$P = 5 \text{ için } 2^{5-1} \cdot (2^5 - 1) = 16 \cdot 31 = 496$$

$$P = 7 \text{ için } 2^{7-1} \cdot (2^7 - 1) = 64 \cdot 127 = 8128$$

ARMSTRONG SAYISI

(Kendilerine Hayran Sayılar)

ÖRNEK

Üç basamaklı bir ABC sayısı için

$$A^3 + B^3 + C^3 = ABC$$

eşitliğini sağlayan sayılara **Armstrong (Narsistik) Sayısı** denir.

Örneğin, $407 = 4^3 + 0^3 + 7^3$ eşitliği sağlandığı için 407 bir Armstrong sayısıdır.

3B0 sayısı bir Armstrong sayısı olduğuna göre, B rakamı kaçtır?

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

ÇÖZÜM

3B0 sayısı üçyüzlü bir sayı olduğu için küpü üçyüzlü olacak şekilde şıkları deneyelim.

$$B = 7 \text{ olsun.}$$

$$370 = 3^3 + 7^3 + 0^3 = 27 + 343 + 0 = 370 \text{ olduğu için } B = 7 \text{ olmalıdır.}$$

Cevap: E

657 YAYINEVİ

KAPREKAR SAYILARI

Bu sayılar, 1949 yılında Hintli matematikçi Kaprekar tarafından tanımlanmıştır. n basamaklı bir k Kaprekar sayısının karesi alınıp sağdaki n basamağı solda kalan n - 1 basamağa eklendiğinde sonuç yine k sayısını verir.

$$k = 55 \text{ olsun } k^2 = 55^2 = 3025$$

sağdan iki basamak 25 ve soldan iki basamak olan 30 un toplamı $25 + 30 = 55 = k$ olduğu için 55 bir Kaprekar sayısıdır.

$$1, 9, 45, 55, 99, 703, 999, 2223, 2728, 4879$$

sayıları da birer Kaprekar sayısıdır.

$$k = 703$$

$$k^2 = 703^2 = 494209$$

$$494 + 209 = 703 = k$$

ÖRNEK

İki doğal sayının EBOB u 6 dir.

Bu sayıların oranı $\frac{3}{4}$ olduğuna göre, küçük sayı kaçtır?

- A) 12 B) 18 C) 24 D) 30 E) 36

ÇÖZÜM

$$\frac{a}{b} = \frac{3}{4} \text{ ise } a = 3k \text{ ve } b = 4k \text{ olur.}$$

EBOB 6 olduğu için 3k ve 4k sayıları 6 nın katı olmalıdır.

$$k = 6 \text{ için } a = 3.6 = 18 \text{ ve } b = 4.6 = 24 \text{ olur.}$$

Küçük sayı 18 olur.

Cevap: B

ÖRNEK

$$a = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^5$$

$$b = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5$$

olduğuna göre, EBOB (a, b) kaçtır?

- A) 360 B) 320 C) 300 D) 280 E) 240

ÇÖZÜM

Tabanları asal iken EBOB en küçük üslü sayıların çarpımıdır.

$$2^4 \text{ ve } 2^3 \text{ ten küçük olan } 2^3 \text{ ü}$$

$$3^2 \text{ ve } 3^4 \text{ ten küçük olan } 3^2 \text{ yi}$$

$$5^5 \text{ ve } 5 \text{ ten küçük olan } 5 \text{ i}$$

çarparak verilen sayıların EBOB u hesaplanır.

$$\text{EBOB } (2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^5, 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$$

Cevap: A

657 YAYINEVİ

UYARI

Rasyonel sayıların EBOB unu bulmak için sayıların paydaları eşitlenir ve payların EBOB u hesaplanır.

ÖRNEK

$\frac{3}{4}, \frac{5}{9}, \frac{1}{6}$ sayılarını ayrı ayrı böldüğünde sonucu tam sayı yapan en büyük sayı kaçtır?

- A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{12}$ C) $\frac{1}{18}$ D) $\frac{1}{20}$ E) $\frac{1}{36}$

ÇÖZÜM

$$\text{EBOB } \left(\frac{3}{4}, \frac{5}{9}, \frac{1}{6} \right) = \text{EBOB } \left(\frac{27}{36}, \frac{20}{36}, \frac{6}{36} \right)$$

$$= \frac{\text{EBOB } (27, 20, 6)}{36} = \frac{1}{36}$$

Cevap: E

ÖRNEK

a bir pozitif tam sayı olmak üzere,

$$\frac{270}{a} \text{ ve } \frac{300}{a}$$

ifadelerini tam sayı yapan en büyük a değeri kaçtır?

- A) 12 B) 18 C) 24 D) 30 E) 36

ÇÖZÜM

270 ve 300 sayılarını bölen en büyük sayı istenen a değeridir.

270	300	②
135	150	2
135	75	③
45	25	3
15	25	3
5	25	⑤
1	5	5
1	1	

$$\text{EBOB } (270, 300) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30 \text{ olur.}$$

Cevap: D

RASYONEL SAYILAR

KESİR

a ve b tam sayılar ve $b \neq 0$ olmak üzere, $\frac{a}{b}$ ifadesine **kesir** denir.

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &\rightarrow \text{pay} \\ &\rightarrow \text{payda} \end{aligned}$$

ÖRNEK

$$\frac{2}{7}, \frac{3}{8}, -\frac{5}{4}, -\frac{2}{3}, -4, 0, 1, \dots$$

sayılarının her biri birer kesirdir.

UYARI

$$\frac{0}{\text{SAYI}} = 0 \text{ (SAYI} \neq 0 \text{)}$$

$$\frac{\text{SAYI}}{0} = \text{(TANIMSIZ) (Payda sıfır olamaz.)}$$

RASYONEL SAYI

Kesirlerin belirttiği sayılara **rasyonel sayı** denir ve Q ile gösterilir.

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in Z \text{ ve } b \neq 0 \right\}$$

ÖRNEK

$\frac{4}{5}, \frac{6}{5}, -8, 0, 4$ kesirleri birer rasyonel sayıdır.

UYARI

Her tam sayı paydası 1 olan rasyonel sayıdır.

UYARI

Kesir çizgisinin önündeki (-) işareti pay ya da paydaya yazılabilir.

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$$

BİR KESRİN GENİŞLETİLMESİ

Bir kesrin pay ve paydası sıfırdan farklı bir tam sayı ile çarpılırsa kesrin değeri değişmez. Bu işleme **kesrin genişletilmesi** denir.

ÖRNEK

$\frac{2}{3}$ kesrinin pay ve paydası 5 ile çarpılarak $\frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{10}{15}$ kesrine genişletilir.

BİR KESRİN SADELEŞTİRİLMESİ

Bir kesrin pay ve paydası sıfırdan farklı bir tam sayıyla bölünürse kesir sadeleştirilmiş olur.

ÖRNEK

$\frac{6}{9}$ kesrinin pay ve paydası 3'e bölünürse $\frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 3} = \frac{2}{3}$ kesri elde edilir.

$$\frac{19}{76} = \frac{19}{2 \cdot 2 \cdot 19} = \frac{1}{4} \rightarrow \begin{array}{r|l} 76 & 2 \\ 38 & 2 \\ 19 & 19 \\ \hline 1 & \end{array}$$

$$\frac{26}{65} = \frac{2 \cdot 13}{5 \cdot 13} = \frac{2}{5} \rightarrow \begin{array}{r|l} 26 & 2 & 65 & 5 \\ 13 & 13 & 13 & 13 \\ \hline 1 & & 1 & \end{array}$$

657 YAYINEVİ

UYARI

$\frac{a}{b}$ kesrinin genişletilmesi veya sadeleştirilmesiyle elde edilen kesirler $\frac{a}{b}$ ye denk kesirlerdir.

ÖRNEK

$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{9}{15} = \frac{12}{20} \dots$ kesirleri denktir ve bu eşitlikte yazılabilecek tüm kesirlerin değeri $\frac{3}{5}$ tir.

EŞİTSİZLİKTE İŞARET TABLOSU

x 'li ifadeler çarpılıp, bölünüyorsa, > 0 , < 0 kullanılıyorsa eşitsizlik işaret tablosu yapılarak çözülür.

ÖRNEK

$$(x + 3) \cdot (4 - x) \geq 0$$

eşitsizliğini sağlayan kaç farklı x tam sayısı vardır?

- A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

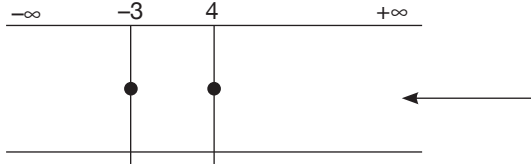
ÇÖZÜM

Tablo yapılırken aşağıdaki aşamalar izlenir.

i. Önce çarpanlar sıfıra eşitlenerek kökler bulunur.

$$\begin{aligned} x + 3 &= 0 & 4 - x &= 0 \\ x &= -3 & x &= 4 \end{aligned}$$

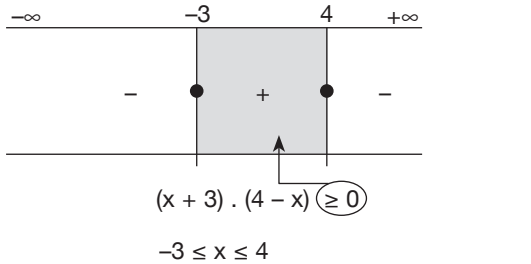
ii. Kökler küçükten büyüğe doğru sıralanarak bölgelere ayrılır.



iii. En büyük dereceli x 'li ifadelerin önündeki işaretler çarpılarak en sağa yazılır.

$$\left. \begin{array}{l} \oplus x + 3 \rightarrow + \\ 4 \ominus x \rightarrow - \end{array} \right\} + \cdot - = \ominus$$

iv. Her bölgede işaret değişir.



-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 olmak üzere, 8 tane tam sayı vardır.

Cevap: D

UYARI

< 0 veya > 0 ise $()$

≤ 0 veya ≥ 0 ise $[]$

ÖRNEK

$$\frac{(x + 4) \cdot (-x - 2)}{(-x + 1) \cdot (x + 5)} < 0$$

eşitsizliğini sağlayan tam sayıların toplamı kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

ÇÖZÜM

i. $x + 4 = 0$ $-x - 2 = 0$ $-x + 1 = 0$ $x + 5 = 0$
 $x = -4$ $x = -2$ $x = 1$ $x = -5$

ii.

Ç.K. = $(-5, -4) \cup (-2, 1)$
 \downarrow \downarrow
tam sayı yok -1, 0
 $-1 + 0 = -1$ olur.

Cevap: B

KÖKLÜ SAYILAR

Tanım:

n, 1'den büyük doğal sayı olmak üzere,

$$x^n = a$$

denklemini sağlayan x sayısına a'nın n. dereceden kökü denir ve

$$x = \sqrt[n]{a}$$

şeklinde gösterilir.

KÖKLÜ İFADELER

\sqrt{a} → karekök a (kök derecesi 2 ise yazılmaz.)

$\sqrt[3]{a}$ → küp kök a

$\sqrt[4]{a}$ → 4. dereceden kök a

şeklinde okunur.

$\sqrt[n]{a}$ ifadesinin gerçel sayı belirtebilmesi için;

- n tek sayı ise her durumda ifade gerçel sayı belirtir yani a negatif, sıfır ya da pozitif olabilir.
- n çift sayı ise $a \geq 0$ olmalıdır yani a negatif olmaz.

• $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{-4}$, $\sqrt[4]{0}$, $\sqrt[5]{\frac{3}{7}}$, $\sqrt[6]{(-3)^6}$

sayılarının her biri gerçel sayıdır.

• $\sqrt{-1}$, $\sqrt[4]{-8}$, $\sqrt[6]{-\frac{1}{8}}$, $\sqrt[8]{-81}$

sayıları, kök derecesi çift iken kök içi negatif olduğu için gerçel sayı belirtmez.

UYARI

Köklü ifadelerin gerçel sayı olabilmesi için kök derecesinin çift sayı olduğu ifadelerde kök içi ≥ 0 olmalıdır.

$$2n\sqrt{\geq 0}$$

ÖRNEK

$\sqrt{3x-8}$ ifadesi gerçel sayı belirttiğine göre, x'in en küçük tam sayı değeri kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

ÇÖZÜM

İfadenin gerçel sayı olabilmesi için $\sqrt{\geq 0}$ şartı sağlanmalıdır.

$$3x - 8 \geq 0$$

$$3x \geq 8$$

$$x \geq \frac{8}{3}$$

$$x \geq 2,6\dots$$

x'in en küçük tam sayı değeri 3 olur.

Cevap: C

657 YAYINEVİ

ÖRNEK

$$A = \frac{\sqrt{x-4} + 3x}{6 - \sqrt{4-x}}$$

ifadesi gerçel sayı belirttiğine göre, A kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) $\frac{5}{2}$ D) $\frac{8}{3}$ E) 3

ÇÖZÜM

İfadenin gerçel sayı belirtmesi için çift dereceli köklerin içi $x \geq 0$ olmalıdır.

$$\sqrt{x-4} \Rightarrow x-4 \geq 0$$

$$\Rightarrow x \geq 4 \dots \text{①}$$

$$\sqrt{4-x} \in \mathbb{R} \Rightarrow 4-x \geq 0$$

$$\Rightarrow 4 \geq x \dots \text{②}$$

① ve ② no'lu eşitsizliklerden $x = 4$ olur.

$x = 4$ için A sayısı;

$$A = \frac{\sqrt{x-4} + 3x}{6 - \sqrt{4-x}} = \frac{\sqrt{4-4} + 3 \cdot 4}{6 - \sqrt{4-4}} = \frac{12}{6} = 2$$

Cevap: B

UYARI

m pozitif tam sayı ve $a \geq 0$ olmak üzere,

$$(m\sqrt{a})^n = m\sqrt{a^n}$$

- $(\sqrt{2})^4 = \sqrt{2^4} = 2^2 = 2^2 = 4$
- $(3\sqrt{3})^9 = 3\sqrt{3^9} = 3^3 = 3^3 = 27$

KÖK DEREJESİNİN SADELEŞTİRİLMESİ VEYA GENİŞLETİLMESİ

$c \neq 0$

$$\bullet \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot c]{a^{m \cdot c}}$$

Kök derecesi hangi sayı ile çarpılıyorsa o sayı içerdeki sayının üssü ile de çarpılır.

$$\bullet \sqrt[n]{a^m} = \frac{n}{c} \sqrt{\frac{m}{a^c}}$$

Kök derecesi hangi sayı ile bölünüyorsa içerdeki sayının üssü de o sayı ile bölünür.

ÖRNEKLER

- $8\sqrt{2^4} = 4\sqrt{\frac{4}{2^4}} = \sqrt{2}$
- $3\sqrt{2} = 3 \cdot 5\sqrt{2^5} = 15\sqrt{32}$

KÖK DIŞINDAKİ İFADEYİ KÖK İÇİNE ALMA

Kök dışında çarpım durumunda bulunan pozitif bir ifade kök içine alınırken, ifadenin üssü kök derecesi ile çarpılır.

$$a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$$

$$a^m \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^{m \cdot n} \cdot b}$$

ÖRNEKLER

- $3^5\sqrt{2} = 5\sqrt{3^5 \cdot 2} = 5\sqrt{243 \cdot 2} = 5\sqrt{486}$
- $2^3\sqrt{3} = \sqrt{2^{3 \cdot 2} \cdot 3} = \sqrt{2^6 \cdot 3} = \sqrt{64 \cdot 3} = \sqrt{192}$

İÇ İÇE KÖKLER

$$\bullet \sqrt[n]{m\sqrt{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

$$\bullet \sqrt[n]{a \cdot m\sqrt{b}} = \sqrt[n \cdot m]{a^m \cdot b}$$

$$\bullet \sqrt[n]{a^m \sqrt{b^k} \sqrt{c}} = \sqrt[n \cdot m \cdot k]{a^{m \cdot k} \cdot b^k \cdot c}$$

ÖRNEKLER

- $3\sqrt[4]{\sqrt{729}} = 3 \cdot 4\sqrt{729} = 12\sqrt{3^6} = \sqrt{3}$
- $4\sqrt{2^5\sqrt{3}} = 4 \cdot 5\sqrt{2^5 \cdot 3} = 20\sqrt{32 \cdot 3} = 20\sqrt{96}$
- $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}} = 2 \cdot 2 \cdot 2\sqrt{3^2 \cdot 3^2 \cdot 3} = 8\sqrt{3^4 \cdot 3^2 \cdot 3} = 8\sqrt{3^7} = 3^{\frac{7}{8}}$

KÖKLÜ SAYILARDA DÖRT İŞLEM**ÇARPMA - BÖLME**

i. Kök dereceleri aynı olan köklü sayıların içindeki ifadeler tek kök altında çarpılıp, bölünebilir.

- $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{2 \cdot 3} = \sqrt{6}$
- $3\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{4} \cdot 3\sqrt{8} = 3\sqrt{2 \cdot 4 \cdot 8} = 3\sqrt{64} = 3\sqrt{4^3} = 4$
- $\frac{3\sqrt{81}}{3\sqrt{3}} = 3\sqrt{\frac{81}{3}} = 3\sqrt{27} = 3\sqrt{3^3} = 3$

ÖRNEK

$$\frac{\sqrt{40} \cdot \sqrt{27}}{\sqrt{120}} \text{ işleminin sonucu kaçtır?}$$

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 10

ÇÖZÜM

Kök dereceleri aynı olduğu için sayılar tek kök altında çarpılıp bölünür.

$$\frac{\sqrt{40} \cdot \sqrt{27}}{\sqrt{120}} = \sqrt{\frac{40 \cdot 27}{120 \cdot 3}} = \sqrt{\frac{27}{3}} = \sqrt{9} = 3 \text{ olur.}$$

Cevap: B

DENKLEM KURMA - KESİR PROBLEMLERİ

PROBLEM ÇÖZME STRATEJİSİ

Problem çözme; soruyu anlama, çözüm yolunu oluşturma ve soruyu çözme olarak üç aşamada gerçekleşir.

Buna göre, problemleri çözerken;

1. Soru, verilenler ve istenen anlaşılana kadar okunur.
2. Verilenler matematik diline çevrilir.
3. Denklem kurma metodları ile matematik diline çevrilir.
4. Bulunanın, soru cümlesinde istenen olup olmadığı kontrol edilir.

MATEMATİK DİLİNE ÇEVİRME

Verilen problemin x , y , a , b , c gibi sembollerle ifade edilmesine matematik diline çevirme denir.

1. Bilinmeyen sayı x olmak üzere;

- > Bir sayının 5 fazlası: $x + 5$
- > Bir sayının 3 eksiği: $x - 3$
- > Bir sayının $\frac{1}{3}$ ü: $\frac{x}{3}$
- > Bir sayının $\frac{1}{3}$ ünün $\frac{2}{5}$ i: $x \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2x}{15}$
- > Bir sayının 7 katı: $7 \cdot x$
- > Bir sayının 2 katının 3 fazlası: $2x + 3$
- > Bir sayının 3 fazlasının 2 katı: $(x + 3) \cdot 2 = 2x + 6$
- > Bir sayının karesinin 7 fazlası: $x^2 + 7$
- > Bir sayının 7 fazlasının karesi:
 $(x + 7)^2 = x^2 + 14x + 49$

biçiminde ifade edilir.

2. İki bilinmeyenli ifadelerde ise bilinmeyenler x ve y olsun;

- > İki sayının farkı: $x - y$
- > İki sayının toplamı: $x + y$
- > İki sayının toplamının 3 katı: $(x + y) \cdot 3 = 3x + 3y$
- > İki sayının farkının $\frac{1}{5}$ i: $\frac{x - y}{5}$
- > İki sayının kareleri farkı $x^2 - y^2 = (x - y) \cdot (x + y)$
- > İki sayının farkının karesi: $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
- > İki sayının karelerinin toplamı: $x^2 + y^2$

UYARI

Problemlerde toplamın verildiği sorularda iki bilinmeyen kullanılır ya da kolaylık olması açısından tek bilinmeyenle çözüm yapılır.

Örneğin; "Umut ile Ceren'in yaşları toplamı 37'dir", şeklindeki bir ifadeyi Umut'un yaşı x ve Ceren'in yaşı y olmak üzere $x + y = 37$ şeklinde ifade edebiliriz.

Ya da kolaylık olması açısından Umut'un yaşını x olarak alıp Ceren'in yaşını $37 - x$ olarak ifade ederiz.

ÖRNEK

8 katının 8 eksiği 120 olan sayı kaçtır?

- A) 15 B) 16 C) 17 D) 18 E) 19

ÇÖZÜM

Problemi matematik diline çevirirken problemde anlatılan sıraya göre hareket etmeliyiz.

Sayı x olsun.

Sayının 8 katı: $8x$

8 eksiği: $8x - 8$ olur.

Buradan $8x - 8 = 120$ denklemi elde edilir.

$$8x = 128 \Rightarrow x = 16 \text{ olur.}$$

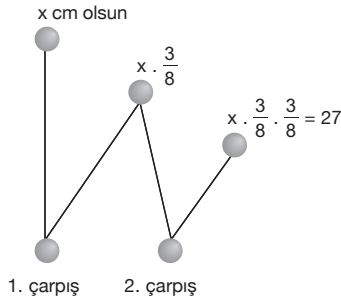
Cevap: B

ÖRNEK

Belirli bir yükseklikten bırakılan bir top yere her çarpışında bir önceki düşüş yüksekliğinin $\frac{3}{8}$ i kadar yükseliyor. Top yere ikinci çarpışından sonra 27 cm yükseldiğine göre, **kaç cm yükseklikten bırakılmıştır?**

- A) 160 B) 168 C) 172
D) 180 E) 192

ÇÖZÜM



$$\frac{9x}{64} = 27$$

$$9x = 64 \cdot \frac{27}{3}$$

$$x = 192 \text{ cm olur.}$$

Pratik Yol:

Bu tarz sorularda ilk yüksekliğin yanında kesri topun yere çarpma sayısı kadar çarparsak son yüksekliği buluruz.

$$\text{ilk yükseklik} \leftarrow x \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} = 27 \rightarrow \text{son yükseklik}$$

top 2 kez sektiyi için

$$x = 27 \cdot \frac{64}{2} = 192 \text{ cm}$$

Cevap: E

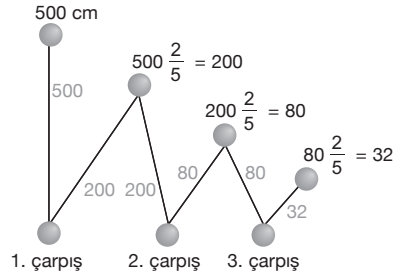
ÖRNEK

500 cm yükseklikten bırakılan bir top yere her çarpışında bir önceki düşüş yüksekliğinin $\frac{2}{5}$ i kadar yükseliyor.

Top yere üçüncü kez çarpıp yükseldiğinde toplam kaç metre yol gitmiş olur?

- A) 10 B) 10,92 C) 11,48
D) 12 E) 12,64

ÇÖZÜM



$$\begin{aligned} \text{Toplam yol} &= 500 + 200 + 200 + 80 + 80 + 32 \\ &= 1092 \text{ cm} = 10,92 \text{ metre} \end{aligned}$$

Cevap: B

ÖRNEK

Ercüment parasının $\frac{3}{4}$ ü ile 7 gömlek ve 6 kravat, kalan parasıyla da 2 gömlek ve 4 kravat alabiliyor.

Buna göre, bir gömleğin fiyatı bir kravatın fiyatının kaç katıdır?

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

ÇÖZÜM

Para $4x$ olsun

$$4x \cdot \frac{3}{4} = 3x \text{ para ile 7 gömlek ve 6 kravat}$$

$$3x = 7g + 6k \dots \text{I}$$

Kalan parası $4x - 3x = x$ olur

$$x = 2g + 4k \dots \text{II}$$

I ve II nolu denklemler ortak çözümlürse

$$3x = 7g + 6k$$

$$3/x = 2g + 4k \Rightarrow 3x = 6g + 12k$$

$$7g + 6k = 6g + 12k$$

$$g = 6k$$

Gömleğin fiyatı, kravatın fiyatının 6 katıdır.

Cevap: D

ÖRNEK

$$\begin{aligned}
 1 \times 1 &= 1 \\
 11 \times 11 &= 121 \\
 111 \times 111 &= 12321 \\
 1111 \times 1111 &= 1234321 \\
 &\vdots \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Yukarıdaki örüntüye göre, $A = 11111111$ olduğuna göre, A^2 sayısının rakamları toplamı kaçtır?

- A) 36 B) 49 C) 64 D) 81 E) 121

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned}
 1 \times 1 &= 1 \quad \rightarrow \quad 1^2 \\
 11 \times 11 &= 121 \quad \rightarrow \quad 11^2 \\
 111 \times 111 &= 12321 \quad \rightarrow \quad 111^2
 \end{aligned}$$

Dikkat edilirse $n : 1$ rakamının adedi olmak üzere rakamlar toplamı n^2 dir.

$A = 11111111$ sayısında 8 adet 1 olduğu için

$n = 8$ dir. A sayısının rakamları toplamı

$$n^2 = 8^2 = 64 \text{ olur.}$$

Cevap: C

ÖRNEK



1. adım 2. adım 3. adım 4. adım

Yukarıda verilen örüntü, aynı kurala göre devam ettirildiğinde 97. adımdaki çemberin içine çizilen çokgenin kenar sayısı kaçtır?

- A) 191 B) 192 C) 193 D) 194 E) 195

ÇÖZÜM

1. adımda 3 kenar vardır. $2 \cdot 1 + 1 = 3$

2. adımda 5 kenar vardır. $2 \cdot 2 + 1 = 5$

3. adımda 7 kenar vardır. $2 \cdot 3 + 1 = 7$

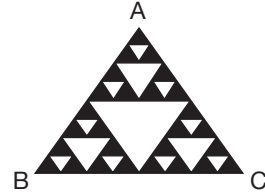
Dikkat edilirse n : adım sayısı olmak üzere kenar sayısı $2n + 1$ dir.

97. adımda $2 \cdot 97 + 1 = 195$ kenar olur.

Cevap: E

ÖRNEK

Sierpinski fraktalı adı verilen aşağıdaki şekil eşkenar üçgenlerden oluşmaktadır.

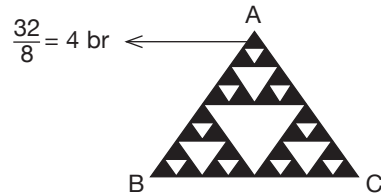


ABC üçgeninin bir kenar uzunluğu 32 birim olduğuna göre, siyah üçgenlerin alanları toplamı kaç br^2 dir?

- A) $54\sqrt{3}$ B) $72\sqrt{3}$ C) $81\sqrt{3}$
D) $108\sqrt{3}$ E) $112\sqrt{3}$

ÇÖZÜM

Şekil eşkenar üçgenlerden oluştuğu için üçgenin her bir kenarı 8 eşit parçaya bölünmüştür.



Eşkenar üçgenin alanı bir kenarı a olmak üzere $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} br^2$ dir.

Bir tane siyah üçgenin alanı $\frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3} br^2$

Şekilde 27 tane siyah üçgen olduğu için siyah üçgenlerin alanları toplamı

$$27 \cdot 4\sqrt{3} = 108\sqrt{3} br^2 \text{ olur.}$$

Cevap: D